М.Б.Верников
Свердловский инженерно-педагогический институт

О психологических факторах обучения математике

В своей повседневной педагогической работе каждый педагог решает, чему учить и как учить студентов.

Ответ на первый вопрос определяет содержание предмета преподавания. С этой точки зрения следует различать преподаваемую науку и предмет преподавания, которые не идентичны.

Ответ на второй вопрос может быть дан после решения первого с учетом контингента обучаемых.

В данной работе намечены некоторые общие подходы в решении указанных задач при обучении математике, а также сделаны конкретные выводы по вопросу преподавания курса высшей математики студентам инженерно-педагогических специальностей технических вузов.

Говоря о преподавании математики, следует учитывать следующие характерные черты математической науки:

I) Математика изучает абстрагированные свойства предметов - числа, а не совокупности предметов; геометрические фигуры, а не реальные тела. При этом математика абсолютизирует свои абстракции: возникшие в ходе ее развития математические понятия в дальнейшем закрепляются и рассматриваются как данные. Сравнение результатов, полученных в математике, с реальной действительностью является задачей не столько математики, сколько ее приложений.

2) Основным методом получения математических результатов является логический вывод, не опирающийся на экспериментальную проверку.

3) Как следствие этого имеет место непреложность математических выводов. Если принять исходные посылки, то полученные из них математическим путем результаты непреложны.

4) Абстракции, возникающие в математике, развиваются ступенчато: от абстракций, непосредственно обобщающих свойства реальных объектов, к абстракциям над абстракциями (например общие алгебраические системы, структура порядка, топологические пространства).

5) Математика обладает свойством универсальной применимости. В любой области, где только удается математически поставить задачу, математика дает результат с точностью, соответствующей точности постановки задачи.

6) Математика занимает особое положение в системе наук, ее нельзя отнести ни к гуманитарным, ни к естественным наукам. Она дает те основные понятия, которые используются почти во всех науках. Многие понятия (множество, структура, система, изоморфизм и др.), впервые возникшие в математике, приобрели статус общенаучных.

Эти характерные черты математики как науки определяют и ряд особенностей предмета преподавания математики. Эти особенности имеются в виду, когда говорят о математическом мышлении или о математических способностях. Мы говорим о них как о психологических факторах обучения математике. Следуя В.А.Крутецкому, будем под способностями к изучению математики понимать индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обуславливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями, навыками в области математики [I] .

В работе, напечатанной в "Zeitscrift für Pädagogik", выделены следующие четыре основных компонента, составляющих ядро математического мышления: I) пространственный; 2) логический; 3) числовой; 4) символический [2] . Заметим, что здесь речь идет не об уровне фактических знаний, а о наличии и степени развития соответствующих интеллектуальных факторов, содействующих успеху обучения математике. При этом указанные факторы и их степень развития у отдельной личности могут быть оценены соответствующим индексом, который определяется на основе проведения тестирования и последующей статистической обработки результатов тестирования математическими методами факторного анализа [3, 4] .

Рассмотрим вопрос об определении содержания предмета математики. По этому вопросу имеются различные точки зрения, полярные из них: I) математика как предмет обучения должна отражать математическую науку в ее современном состоянии, а методы обучения математике должны отражать методы математических исследований;

2) математика как предмет обучения должна отражать процесс исторического развития математики, а методы обучения – процесс исторического получения составляющих результатов.

Нам представляется, что обе эти крайние точки зрения не приемлемы.

Интересным представляется подход к изучению математики, предлагаемый Д.Пойа, стоящим в теории познания на позициях неопозитивизма [5, 6]. Д.Пойа предлагает приравнять математику и ее преподавание к другим экспериментальным наукам. Согласно концепции Д.Пойа, процесс познания в математике достигается на пути "математического экспериментирования" или методом "доказательства и опровержения" (эвристическим методом) [8]. Д.Пойа предлагает при преподавании математики моделировать этот процесс. Внедрение в учебный процесс элементов системы Д.Пойа представляется нам весьма ценным и в психологическом плане реальным.

Интересен подход к преподаванию математики, основанный на концепции мышления, развитой Ж.Пиаже [9, 10] . Ж.Пиаже соотносит свое учение об операторных структурах мышления со взглядами группы ученых Н.Бурбаки о трех фундаментальных структурах, на которых покоится "здание математики" [11]. К этим структурам ученые относят: 1) алгебраические структуры; 2) структуры порядка; 3) топологические структуры.

В преподавании математики, по мнению Ж.Пиаже, должен иметь место своеобразный синтез открытых математиками математических структур и открытых психологами операторных структур мышления. Реализация идей Ж.Пиаже дана в статье К.Гаттеньо [12].

Наша точка зрения по вопросам преподавания математики близка к точке зрения, изложенной в работе Л.Д.Кудрявцева, где в основном рассмотрен вопрос о преподавании математики в технических вузах [13]. Но мы хотим дать более общую концепцию.

Преподавание математики должно основываться на современном состоянии ее развития, и здесь мы не можем пройти мимо основополагающих положений группы математиков Н.Бурбаки, которая провела анализ современного состояния математики и установила, что объединение разрозненных разделов современной математики может быть проведено на основе введенного ими понятия математической структуры. Эти ученые выделили основные 3 типа структур (см.выше) и задали их иерархию. В центре находятся основные типы структур (порождающие). Каждый из этих типов обогащается новыми аксиомами, и создаются производные структуры (абелевы группы, линейно упорядоченные множества и т.д.). За пределами этого ряда появляются сложные структуры, в которые входят несколько порождающих структур, скомбинированных при помощи одной или нескольких связывающих аксиом (топологическая алгебра, алгебраическая топология и т.д.).

Примечательно, что свою теорию ученые создали в поисках путей преподавания математики.

В работе Л.Д.Кудрявцева место математических структур занимают "математические модели"[13]. Математическая модель, в сущности, есть комбинация математических структур [13].

Программа для изучения математики конкретным составом учащихся определяется,исходя из целей изучения математики, поставленных перед данной группой учащихся.

Нами составлена "Программа по курсу высшей математики для студентов инженерно-педагогических специальностей (ИПС) технических вузов ". Эта программа одобрена пленумом УМО по ИПС в ноябре 1988 г. (г.Харьков) [14].

При составлении данной программы нами учитывались: 1) потребности выпускающих кафедр в математической подготовке студентов, 2) внутренние логические закономерности курса, 3) потребности общекультурного интеллектуального развития студентов как будущих педагогов, 4) уровень первоначальной подготовки студентов (выпускников ПТУ).

После составления программы соответствующего курса встает вопрос о его обеспечении учебниками и учебными пособиями, Так, в частности, нами издается курс лекций "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии" для студентов ИПС [15].

При наличии программы,учебников,учебных пособий,а также лекторов, учителей встает вопрос о подборе контингента учащихся. Если ставить этот вопрос на научную базу (что совершенно отсутствует в действительности, в условиях которой мы работаем в настоящее время), то отбор контингента учащихся следует начинать с определения уровня психологических факторов, которые необходимы для успешного овладения программой. В идеальном виде это число или несколько чисел, характеризующих индекс "математического фактора", необходимый для обучения по определенной программе.Затем испытуемые подвергаются системе тестов, определяющих их индекс по "математическому фактору". Отбираются те учащиеся, индекс которых не ниже требуемого.

После этого должны быть определены требования к начальной подготовке отобранных по предмету, необходимые для успешного освоения выбранной программы. Учащиеся, отобранные по индексу "математического фактора", подвергаются экзамену по предмету для выявления действительного уровня их первоначальной подготовки. Выявленные пробелы в уровне первоначальной подготовки должны быть ликвидированы путем индивидуальной адаптации каждого из обучаемых (формы этой адаптации несложно продумать).

Ясно, что при такой("идеальной") системе успех обучения целиком зависит от квалификации и ответственности педагогов. В действительности система отбора в наш институт не гарантирует ни требуемого индекса "математического фактора", ни отсутствия пробелов в первоначальной подготовке студентов. По этой причине мы начинаем обучение математике наших студентов с входного теста. Выявленные пробелы в знаниях студентов мы пытаемся ликвидировать; для этого, в частности, используется факультативный курс, носящий пропедевтический характер, программа курса также учитывает необходимость такой пропедевтической подготовки [I4].

Что же касается индекса "математического фактора", то в настоящее время он фактически не учитывается, а его повышение - вопрос квалификации преподавателей. Думается, что наша программа дает для этого определенные возможности [I4] . Мы считаем,что вопрос повышения общеинтеллектуального уровня, в частности индекса "математического фактора" наших студентов, заслуживает специального изучения.

Мы понимаем,что вопрос учета индекса "математического фактора" на уровне приемных экзаменов имеет не только научный, но и организационный аспект, а поэтому не строим иллюзий относительно реализации изложенной концепции. В то же время мы полагаем, что в каком-то виде индекс "математического фактора" обучаемых должен учитываться, если мы не хотим превратить процесс обучения в фикцию. Практически всеми педагогами это учитывается, хотя зачастую делается на интуитивном уровне.

Одно из направлений учета психологических факторов в обучении математике - это геометризация курса математики.

Как показывает наш многолетний опыт преподавания математики, из указанных ранее четырех компонентов математического мышления статистически наиболее благополучно обстоит дело с пространственным компонентом.

Среди студентов СИПИ мы преимущественно встречаем лиц с так называемым художественным типом мышления, им легче обращаться с наглядными геометрическими образами (а не с логическими конструкциями, оформленными в словесную форму).

В математике как предмете обучения можно условно выделить два аспекта: понятийный и операционный. Первый аспект представляется набором определений, понятий и теорем об этих понятиях, что преимущественно составляет содержание лекционного курса; второй - набором методов или алгоритмов решения задач, что является содержанием практических занятий.

Мы считаем, что понятийный аспект предмета математики может быть полностью геометризован. Под этим мы имеем в виду, что определение всех понятий, вводимых в курс, может быть дано не в виде логических сл эесных конструкций, а в виде наглядных геометрических образов. Причем на основе этих геометризованных определений можно провести доказательство всех необходимых теорем.

Для иллюстрации приведем следующий пример: определение понятия производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$. Обычно это определение дается на основании понятия предела функции в точке $\left(f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$,

что связано с достаточно сложными логическими и словесными конструкциями. В качестве геометрического эквивалента этого определения можно использовать следующее определение: если в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ графика функции $y=f(x)$ существует касательная t к кривой этого графика, то эта функция называется дифференцируемой в точке $x=x_0$, а тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс(угловой коэффициент) называется производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$.

Замена алгебраического образа (предела) геометрическим (угол и его тангенс) означает в психологическом смысле переключение с логического, числового и символического компонентов мышления на пространственный.

В то же время такое геометризованное определение понятия производной позволяет без принципиальных затруднений развить теорию дифференцирования функций в общепринятом объеме.

В статье "Геометрическая теория определителей" нами разработана методика геометризованного изложения теории определителей [I6].

Конкретная разработка геометрического изложения всех разделов курса высшей математики в рамках указанной выше программы, на наш взгляд, не встретит принципиальных препятствий. По разделу "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" эта задача в основном решена нами в курсе лекций "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии" [I5].

Литература

I. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, I968. 430 с.

2. Haecker V., Ziehen Th. Beitrag zur Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung // Zeitschrift für Pädagogik, 1931, №121.

3. Thurstone L.L., Thurstone T.G. Factorial studies of intelligence // Psychometric monographs. 1941. №2.

4. Харман Г. Современный факторный анализ. М.: Статистика, I972. 486 с.

5. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, I975. 462 с.

6. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, I976. 448 с.

7. Popper K.R. The nature of philosophical problems and their roots in science // Brit. J. Philos. Sci. 1952. V.3. P. 124-156.

8. Лакатос И. Доказательства и опровержения. М.: Наука, I976. I5I с.

9. Пиаже Ж. Речь и мышление ребенка. М.; Л.: Учпедгиз, I932. 238 с.

I0. Пиаже Ж. Структуры математические и оперативные структуры мышления // Преподавание математики: Сб. М.: Учпедгиз, I960. С. I0-3I.

II. Бурбаки Н. Архитектура математики // Мат. просвещение. I960. № 5.

12.Гаттеньо К. Педагогика математики //Преподавание математики: Сб. М.: Учпедгиз, 1960. С.116-155.
13.Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980. 143 с.
14.Программа курса высшей математики для инженерно-педагогических специальностей технических вузов/Сост.М.Б.Верников, И.Я.Гусак, А.С.Просвиров, Б.П.Танана, С.Д.Филиппов, Л.С.Чебыкин, Н.И.Черных; Свердл.инж.-пед.ин-т. Свердловск, 1988. 21 с.
15.Верников М.Б., Черных Н.И. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Курс лекций /Свердл.инж.-пед.ин-т. Свердловск, 1991. 225 с. Рукопись.
16.Верников М.Б., Черных Н.И. Геометрическая теория определителей//Содержание и методическое обеспечение естественно-научной подготовки инженеров-педагогов: Сб.науч.тр./Свердл.инж.-пед.ин-т. Свердловск, 1990. С.77-83.

В.А.Труфанов

Свердловский педагогический институт

Психолого-педагогические основы постановки лабораторных работ

Плодотворное изучение психологических особенностей каждого определенного возраста, его внутренних противоречий положительно сказывается на решении конкретных учебных и производственных задач. Гармоническое развитие личности молодого человека реально лишь при условии правильного разрешения всевозможных противоречий процессов воспитания и обучения.

Психологическим вопросам профессионального самоопределения посвящены работы многих авторов (П.А.Шавир, В.И.Загвязинский и др.), где рассматриваются общность и расхождение между наиболее ярко выраженными интересами молодых людей и первоочередными профессиональными намерениями. Анализ соотношения этих не вполне совпадающих в генетическом плане факторов самоопределения позволяет понять выбор профессии как длительный процесс развития личности.